МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ "РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ ЗАОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ФАКУЛЬТЕТ МЕХАНИЗАЦИИ И ТЕХНИЧЕСКОГО СЕРВИСА

Кафедра высшей математики

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

студентам 1* и 2 курсов по направлению подготовки бакалавров 230400 – "Информационные системы и технологии" (профиль " Информационные системы и технологии ");

студентам 2* и 3 курсов по направлению подготовки бакалавров 110800 – "Агроинженерия" (профили: "Технический сервис в агропромышленном комплексе"; "Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции"; "Технические системы в агробизнесе"; "Электрооборудование и электротехнологии";)

Москва 2012

Составитель доцент Решетников В.П.

УДК 683.1

Прикладная математика: Методические указания по изучению дисциплины / Рос. гос. аграр. заоч. ун-т; Сост. В.П. Решетников. М., 2012.

Предназначены для студентов 1*, 2, 2*, 3 курсов

Утверждены методической комиссией факультета механизации и технического сервиса ФГБОУ ВПО РГАЗУ

Рецензенты: д.т.н., профессор В.И. Славкин, к.т.н., доцент Закабунин А.В. (ФГБОУ ВПО РГАЗУ)

Раздел 1 .ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Прикладная математика» относится к вариативной части второго цикла ООП. Методические указания по данной дисциплине составлены в соответствии с рабочей учебной программой и рабочими учебными планами, утверждёнными учёным советом ФГБОУ ВПО РГАЗУ 26 января 2011г.

Они содержат общие методические указания по изучению дисциплины, указания к выполнению контрольной работы, образцы решения задач, контрольные задания. В них весь материал разбит на модули. В каждом модуле указана литература, которую студент должен изучить. Следует также внимательно разобрать решения тех задач, которые приведены в данном пособии.

Основной формой обучения студента -заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, ответы на вопросы для самоконтроля ,выполнение контрольных работ.

При изучении материала по учебникам полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения.

Если в процессе изучения теоретического материала или при решении задач возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удаётся, можно обратиться к преподавателю для получения устной или письменной консультации. В случае письменной консультации следует точно указать характер затруднения, полные названия учебника или задачника, где находятся непонятный вопрос или задача, год издания и страницу. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникают сомнения в правильности ответов на вопросы для самоконтроля.

1.1. Цели и задачи дисциплины

<u>Цель</u> – ознакомление студентов с основными сведениями о классических численных методах решения различных прикладных задач.

<u>Задачи дисциплины:</u>

1)научить выбирать оптимальный численный метод для анализа конкретной модели;

2) научить применять имеющиеся алгоритмы решения прикладных задач;

3) научить оценивать степень точности полученного результата;

4) развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление, повысить общий уровень математической культуры;

5) выработать умение самостоятельно изучать литературу по математике и её приложениям.

В результате изучения дисциплины студент должен:

1) обладать следующими **общекультурными компетенциями (ОК):**
   - владением культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);
   - умением логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2)
2) обладать следующими **профессиональными компетенциями (ПК):**
   - способностью к использованию основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, к применению методов математического анализа и моделирования (ПК -1);
   - способностью решать инженерные задачи с использованием основных законов механики, электротехники, гидравлики, термодинамики (ПК-3);
   - способностью проводить, обрабатывать и оценивать результаты экспериментальных исследований (ПК -5).

В результате изучения дисциплины студент должен:

-**знать** основные численные методы решения прикладных задач;

-**уметь:**

а) использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надёжностью технических систем;

б) выбирать и применять оптимальный численный метод решения типовых профессиональных задач;

в) давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;

-**владеть** основными методами и приёмами вычислительной математики.

1.2. Библиографический список

Основной

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МЭИ, 2003.
2. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие. - СПб.: «Лань», 2007.
3. Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учеб. пособие. – СПб.: «Лань», 2009.

Дополнительный

4. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов. - М.: Высш. шк., 2006.
5. Фадеев М.А., Марков К.А. Основные методы вычислительной математики. - СПб.: «Лань», 2008.
6. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. - М: Астрель; «АСТ», 2004.

В методических указаниях приведённые учебные пособия для краткости обозначаются заключёнными в квадратные скобки номерами из библиографического списка.

1.3 Распределение учебного времени по модулям (разделам) и темам дисциплины

№ п/п	Наименование модулей и тем дисциплины	Всего, час	В том числе			Рекомендуемая литература
			Лекции	Практ. занятия	Самост. работа	
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1. Приближенное решение уравнений и систем уравнений.		34	2 (2)	4 (2)	28 (30)	[1] - [6]
1	Тема 1.1. Введение в элементарную теорию погрешностей.	6	- (-)	- (-)	6 (6)	
2	Тема 1.2. Методы отыскания решений нелинейных уравнений	10	2 (2)	2 (2)	6 (6)	
3	Тема 1.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.	8	- (-)	- (-)	8 (8)	
4	Тема 1.4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	10	- (-)	2 (-)	8 (10)	
Модуль 2. Приближение функций		30	2 (2)	2 (2)	26 (26)	[1] - [6]
Модуль 3. Численные методы дифференцирования и интегрирования.		24	2 (-)	- (-)	22 (24)	[1] - [6]
1	Тема 3.1. Численное дифференцирование.	10	1 (-)	- (-)	9 (10)	
2	Тема 3.2. Численное интегрирование.	14	1 (-)	- (-)	13 (14)	
Модуль 4. Элементы линейного программирования.		20	- (-)	- (-)	20 (20)	[6]
	Итого	108	6 (4)	6 (4)	96 (100)	

Примечание: в скобках указаны часы для студентов с сокращенным сроком обучения.

Раздел 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ

2.1 Модуль 1.Приближённое решение уравнений и систем уравнений

2.1.1.Содержание модуля

Тема 1.1. Введение в элементарную теорию погрешностей

Источники и классификация погрешностей результатов численного решения задачи. Приближённые числа, абсолютная и относительная погрешности. Погрешность арифметических операций над приближёнными числами. Погрешность функции.

Тема 1.2. Методы отыскания решений нелинейных уравнений

Отделение корней. Уточнение корней: метод половинного деления, метод хорд, метод Ньютона, метод итерации.

Тема 1.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Решение линейных систем методом простой итерации. Достаточные условия сходимости метода простой итерации. Метод Зейделя решения линейных систем.

Тема 1.4 . Приближенное решение дифференциальных уравнений

Постановка задачи. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Метод Эйлера и его модификации. Метод Рунге-Кутта.

2.1.2. Методические указания по его изучению

Тема 1.1

В большинстве случаев вычисления производятся с приближёнными числами и притом приближённо. Поэтому даже для точного метода решения задачи на каждом этапе вычислений возникают погрешности действий и погрешности округлений. Если сам метод приближённый, то к этим двум погрешностям присоединяется погрешность метода. В связи с этим необходимо знать и уметь применять правила, которыми надлежит пользоваться при выполнении арифметических операций с приближёнными числами и для получения приближённого результата.

Пример 1. Найти сумму S=54,70+386,358+32,4357 полагая, что все слагаемые записаны с верными цифрами.

Решение. При сложении (вычитании) приближённых чисел в сумме следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их имеет слагаемое с наименьшим числом десятичных знаков. Последний верный разряд суммы - разряд сотых (см. первое слагаемое).Два остальных числа округляем на разряде тысячных(правило запасной цифры).

S=54, 70+386,358+32,436=473,494.

Полученный результат округляем. Окончательный результат
S=473, 49.

Пример 2. Найти произведение чисел 82, 246 и 7.48

Решение. Второй сомножитель содержит наименьшее число верных значащих цифр-три. Поэтому первый сомножитель округляем до 82,25 (правило запасной цифры). Производим умножение:

82, 246 · 7,48=615, 2300.

Результат округляем: 82, 246 · 7,48 ≈ 615, 23.

Тема 1.2

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение достаточно сложное, то его корни сравнительно редко удаётся найти точно. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней теряет смысл. Поэтому важное значение приобретают способы приближённого нахождения корней уравнения и оценки степени их точности.

Приближённое нахождение изолированных действительных корней уравнения $f(x)=0$ обычно складывается из двух этапов:

1) отделение корней, т.е. установление возможно тесных промежутков, в которых содержится один и только один корень данного уравнения;

2) уточнение приближённых корней, т.е. доведение их до заданной точности.

Для отделения корней полезна следующая теорема из математического анализа. Теорема. Если непрерывная функция $\boldsymbol{f(x)}$ принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков, то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения $f(x)=0$. Этот корень будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала $(a;b)$.

Пример 3. Отделить корни уравнения $f(x)= x^3+5x+3=0$.

Решение. Производная $f'(x)=3x^2+5$ существует и сохраняет постоянный знак при всех значениях аргумента x. Значит, данное уравнение в интервале
$(-1;0)$ имеет единственный действительный корень, так как $f(-1)= -3 \quad 0$
и $f(0) = 3 >0$.

Если существует непрерывная производная $f'(x)$ и корни уравнения

$f'(x) = 0$ легко вычисляются, то процесс отделения действительных корней уравнение $f(x)= 0$ можно упорядочить. Для этого достаточно определить знаки функции $f(x)$ в точках нулей её производной и в граничных точках области определения функции $f(x)$.

Пример 4. Отделить действительные корни уравнения $f(x)= x^5 -5x-1=0$.

Решение. Здесь $f'(x)=5x^4 -5= 5(x^4-1)$.

Поэтому $f'(x)=0$ при $x^4 -1 =0$. Отсюда $(x^2-1)(x^2+1)=0$ или
$(x+1)(x-1)=0$. Таким образом, $f'(x)=0$ при $x_1 =-1$ и $x_2= 1$.

Составим схему:

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f(x)$	-	+	-	+

Следовательно, данное уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ и $(1;\infty)$.Теперь эти интервалы можно уменьшить. Так как $f(-2)<0$ и $f(-1)>0$, то вместо первого интервала можно взять интервал (-2;-1). Аналогично убеждаемся, что вместо второго интервала можно взять интервал (-1,0), а вместо третьего интервала - интервал (1;2).

После того, как корни уравнения отделены, их следует уточнить. Для этого используют следующие методы: метод половинного деления, метод хорд, метод касательных, метод итераций.

Пример 5. Найти положительный корень уравнения:
$f(x)\equiv x^3-0,2x^2-0,2x-1,2=0$
методом хорд, сделав три приближения. Оценить погрешность.
Решение. Прежде всего, отделяем корень. Так как $f(1)=-0,6<0$ и $f(2)=5,6>0$, то искомый корень лежит в интервале (1;2). Производная $f'(x)=3x^2-0.4x-0.2$ сохраняет знак на этом интервале. Значит, внутри интервала (1,2) лежит один корень данного уравнения. Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. Так как $f(1,5)=1,425$,то искомый корень ξ лежит в интервале (1;1,5) .Если корень уравнения лежит на отрезке $[a;b]$ и $f(a)<0$, $f(b)>0$, то по методу хорд за первое приближение корня принимают

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \quad (1)$$

Далее, применяя этот приём к тому из отрезков $[a;x_1]$ или $[x_1;b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня x_2 и т.д.

Последовательно применяя формулу (1), будем иметь:

$$x_1=1+ \qquad (1,5-1)=1+0,15=1,15.$$

Теперь вычисляем $f(x_1)=f(1,15)=-0,173$.

Из двух промежутков (1;1,15),(1,15;1.5) выбираем второй, так как на его концах знаки $f(x)$ противоположны.

Находим второе приближение:

$$x_2=1{,}15+\qquad\qquad(1{,}5-1{,}15)=1.15+0{,}040=1{,}190.$$

Вычисляем $f(x_2)=f(1.190)=-0.036$

Находим третье приближение:

$$x_3=1{,}190+(1{,}5-1{,}190)=1.198$$

Вычисляем: $f(x_3)=f(1{,}198)=-0{,}0072.$

Для оценки точности приближения воспользуемся формулой:

$$|x_n-\xi|\le\qquad\qquad,$$

где $|f'(x)|\ge m_1$ *при* $x_3<x<1{,}5.$

Поскольку $f''(x)=6x-0{,}4>0$ на отрезке [1;1,5], то приближения $x_1, x_2, x_3 \dots x_n \dots$ образуют монотонно возрастающую последовательность, поэтому в нашем случае

$$0<\xi-x_3<\frac{|f(x_3)|}{m_1}$$

Так как $f'(x)=3x^2-0{,}4x-0{,}2$ и при $x_3<x<1{,}5$ имеем

$f'(x)\ge 3\cdot(1{,}198)^2-0{,}4\cdot 1{,}198-0{,}2=3\cdot 1{,}43-0{,}68=3{,}61$,то можно принять

$$0<\xi-x_3<\approx 0{,}002.$$

Таким образом, $\xi=1{,}198+0{,}002\cdot\varepsilon$, где $0<\varepsilon\le 1$.

Пример 6. Применяя комбинированный метод хорд и касательных, вычислить с точностью до 0,0005 единственный положительный корень уравнения $f(x)\equiv x^5-x-0{,}2=0.$

Решение. Пусть $f(a)\cdot f(b)<0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют постоянные знаки на отрезке $[a,b]$.Соединяя метод хорд и метод Ньютона (метод касательных), получаем метод, на каждом этапе которого находим значения x_n по недостатку и значения $\overline{x_n}$ по избытку точного корня ξ уравнения $f(x)=0$. Отсюда вытекает, что цифры общие для x_n и $\overline{x_n}$ обязательно принадлежат точному корню.

Если $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ при $a\leq x\leq b$ и b – тот конец промежутка [a,b], где знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы, то полагаем $x_0=a$, $\overline{x_0}=b$,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(\overline{x_n})-f(x_n)}(\overline{x_n}-x_n)\quad (2)$$

$$\overline{x_{n+1}}=\overline{x_n}-\frac{f\left(\overline{x_n}\right)}{f'\left(\overline{x_n}\right)}\qquad \left(n=0,1,2,\ldots\right)\qquad \text{(3).}$$

причём на каждом шаге метод хорд применяется к новому отрезку [x_n , $\overline{x_n}$]. Если допустимая абсолютная погрешность приближённого корня задана заранее и равна ε, то процесс сближения прекращается в тот момент, когда будет обнаружено, что $\overline{x_n}-x_n<\varepsilon$. По окончании процесса за значение корня ξ лучше всего взять среднее арифметическое полученных значений:

$$\xi=\qquad(x_n+\overline{x_n}).$$

В данном примере $f(1)<0$ и $f(1{,}1)>0$, значит корень содержится в интервале (1;1,1).Имеем: $f'(x)=5x^4-1$ и $f''(x)=20x^3$.В выбранном интервале $f'(x)>0$; $f''(x)>0$, то есть знаки производных сохраняются. Применим комбинированный метод, полагая

$x_0=1$ и $\overline{x_0}=1{,}1$. Так как

$f(x_0)=f(1)=-0{,}2$; $f(\overline{x_0})=f(1{,}1)=0{,}3105$;

$f'(\overline{x_0})=f'(1{,}1)=6{,}3205$, то формулы(2) и (3) дают:

$$x_1=1+\qquad \overline{x_1}=1{,}1-$$

Ввиду того, что $\overline{x_1}-x_1=0{,}012$, то точность недостаточная. Находим следующую пару приближений:

$$x_2=1.039+\frac{0.012\cdot 0.0282}{0.0595}\approx 1.04469;\ \overline{x_2}=1.051-\frac{0.0313}{5.1005}\approx 1.04487$$

Здесь $\overline{x_2}-x_2=0.00018$, то есть нужная степень точности достигнута. Можно положить

$$\xi=\frac{1}{2}(1.04469+1.04487)=1.04478\approx 1.045$$

Пример 7. Найти методом итерации наибольший положительный корень уравнения

$$x^3+x-1000=0 \text{ с точностью до } 0{,}0001$$

Решение. Воспользуемся теоремой:

Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем все ее значения принадлежат этому отрезку.

Тогда, если существует правильная дробь ***q***, такая что

$|\varphi'(x)| \le q < 1$ при $a \le x \le b$, то

1) процесс итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$ (n=1,2 …) сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a,b]$;
2) предельное значение $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является единственным корнем уравнения x=$\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Так как левая часть данного уравнения при x=9 отрицательна , а при x=10 – положительна, то корень уравнения лежит на отрезке $[9,10]$.

Запишем данное уравнение в виде:

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}\,.$$

Положим $\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$, тогда будем иметь

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}\,.$$

Отсюда, учитывая, что x $\in [9,10]$ получим

$$|\varphi'(x)| \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q$$

Вычисляем последовательные приближения x_n с одним запасным знаком по формуле:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \quad \text{(n=0;1;2; …).}$$

$$x_0 = 10;\ x_1 = \sqrt[3]{1000 - 10} = \sqrt[3]{990} = 9{,}96655. \qquad x_2 = \sqrt[3]{1000 - x_1} = \sqrt[3]{1000 - 9{,}96655} = 9{,}96666.$$
$$x_3 = \sqrt[3]{1000 - x_2} = \sqrt[3]{1000 - 9{,}96666} = 9{,}96667$$

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{q}{1-q}\varepsilon\,,$$

где ε- заданная предельная абсолютная погрешность корня и $|\varphi'(x)| \le q$.

В нашем случае q = **.** Так как тогда 1-q≈ 1, то с точностью до 0,0001 можно считать, что корень данного уравнения ʓ=9,9667.

Тема 1.3

Способы решения линейных систем в основном разделяются на две группы:

1) Точные методы, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней систем(таковы, например, правило Крамера, метод Гаусса).
2) Итерационные методы, позволяющие получить корни системы путём сходящихся бесконечных процессов (к их числу относятся, например, метод итерации, метод Зейделя и другие).

Вследствие неизбежных округлений результаты даже точных методов являются приближёнными, причём оценка погрешности корней в общем случае затруднительна. При использовании итерационных процессов, сверх того, добавляется погрешность метода. Эффективное применение итерационных методов зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса.

Пример 8 . Решить систему методом итерации

Решение. Для успешного применения процесса итерации модули диагональных коэффициентов системы должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных коэффициентов этой системы (свободные члены при этом роли не играют). В данной системе диагональные коэффициенты **4; 3; 4** системы значительно преобладают над остальными коэффициентами при неизвестных. Приведём эту систему к нормальному виду. Для этого разрешим первое уравнение относительно $\boldsymbol{x_1}$, второе относительно $\boldsymbol{x_2}$, третье-относительно $\boldsymbol{x_3}$. Получим эквивалентную систему уравнений

(4)

За нулевые приближения корней данной системы принимаем столбец свободных членов:

$\boldsymbol{x_1^{(0)}=2 , x_2^{(0)} =3, x_3^{(0)}=5}$

Подставляя эти значения в правые части уравнений (4), получим первые приближения корней:

$x_1^{(1)}$=2-0,06 · 3+0,02 · 5=1,92

$$x_2^{(1)}=3-0{,}03\cdot 2+0{,}05\cdot 5=3{,}19$$
$$x_3^{(1)}=5-0{,}01\cdot 2+0{,}02\cdot 3=5{,}04$$
Далее, подставляя эти найденные приближения в правые части уравнений (4), получим вторые приближения корней:
$$x_1^{(2)}=2-0{,}06\cdot 3{,}19+0{,}02\cdot 5{,}04=1{,}9094$$
$$x_2^{(2)}=3-0{,}03\cdot 1{,}92+0{,}05\cdot 5{,}04=3{,}1944$$
$$x_3^{(2)}=5-0{,}01\cdot 1{,}92+0{,}02\cdot 3{,}19=5{,}0446$$
После новой подстановки будем иметь третьи приближения корней:
$$x_1^{(3)}=1{,}90923;\ x_2^{(3)}=3{,}19495,\ x_3^{(3)}=5{,}04485$$
Аналогично получим четвертые приближения корней:
$$x_1^{(4)}=1{,}9092000;\ x_2^{(4)}=3{,}1949656;\ x_3^{(4)}=5{,}0448067$$
Значит, можно взять
$$x_1\approx 1{,}9092,\ x_2\approx 3{,}1950,\ x_3\approx 5{,}0448$$

Тема 1.4

Известные методы решения дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса функций. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач, нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблицы значений искомой функции в зависимости от значений переменной.

Пример 9. Решить методом Рунге-Кутта дифференциальное уравнение $\frac{y'}{=x}+y$ при начальном условии $y(0)=1$ на отрезке $[0;0.5]$ с шагом $h=0.1$.

Решение. При решении уравнения $\frac{y'}{=f(x,y)c}$ начальным условием $y(x_0)=y_0$ методом Рунге – Кутта используются следующие расчётные формулы:
$$x_i=x_0+ih\qquad (i=0,1,\dots,n-1)$$
$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i\qquad (i=0,1,\dots,n-1)$$
$$\Delta y_i=\frac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right)\ (i=0,1,\dots,n-1),$$
где коэффициенты κ_i вычисляются по формулам
$$k_1^{(i)}=hf(x_i,y_i),\qquad k_2^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2};\ y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$$
$$k_3^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2};\ y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\qquad k_4^{(i)}=hf\left(x_i+h;\ y_i+k_3^{(i)}\right).$$
Для i=0 вычисляем коэффициенты k_i:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0.1 \cdot (x_0 + y_0) = 0.1 \cdot (0 + 1) = 0.1;$$
$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.05 + 1.05) = 0.11;$$
$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.05 + 1.055) = 0.1105;$$
$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0.1 \cdot (0.1 + 1.1105) = 0.1211;$$
$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0.1 + 0.22 + 0.221 + 0.1211) = 0.1104;$$
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1; \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.1104 = 1.1104.$$

Для i=1 имеем:

$$k_1^{(1)} = hf(x_1, y_1) = 0.1 \cdot (0.1 + 1.1104) = 0.1210$$
$$k_2^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.15 + 1.1104 + 0.0605) = 0.1321;$$
$$k_3^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.15 + 1.1104 + 0.0660) = 0.1326;$$
$$k_4^{(1)} = hf\left(x_1 + h; y_1 + k_3^{(1)}\right) = 0.1 \cdot (0.2 + 1.1104 + 0.1326) = 0.1443;$$
$$\Delta y_1 = \frac{1}{6\left[k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}\right]} = \frac{1}{6}(0.1210 + 0.2642 + 0.2652 + 0.1443) = 0.1325;$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2; \qquad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.1104 + 0.1325 = 1.2429.$$

Для i=2 имеем

$$k_1^{(2)} = hf(x_2, y_2) = 0.1 \cdot (0.2 + 1.2429) = 0.1443$$
$$k_2^{(2)} = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}; y_2 + \frac{k_1^{(2)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.25 + 1.2429 + 0.0721) = 0.1565;$$
$$k_3^{(2)} = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}; y_2 + \frac{k_2^{(2)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.25 + 1.2429 + 0.0782) = 0.1571;$$
$$k_4^{(2)} = hf\left(x_2 + h; y_2 + k_3^{(2)}\right) = 0.1 \cdot (0.3 + 1.2429 + 0.1571) = 0.1700;$$
$$\Delta y_2 = \frac{1}{6\left[k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)}\right)} = \frac{1}{6}(0.1443 + 0.3130 + 0.3142 + 0.1700) = 0.1569;$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3; \qquad y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 1.2429 + 0.1569 = 1.3998.$$

Для i=3 имеем

$$k_1^{(3)} = hf(x_3, y_3) = 0.1 \cdot (0.3 + 1.3998) = 0.1700$$
$$k_2^{(3)} = hf\left(x_3 + \frac{h}{2}; y_3 + \frac{k_1^{(3)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.35 + 1.3998 + 0.0850) = 0.1835;$$

$k_3^{(3)} = hf\left(x_3 + \frac{h}{2}; y_3 + \frac{k_2^{(3)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.35 + 1.3998 + 0.0917) = 0.1842;$
$k_4^{(3)} = hf\left(x_3 + h; y_3 + k_3^{(3)}\right) = 0.1 \cdot (0.4 + 1.3998 + 0.1842) = 0.1984;$
$$\Delta y_3 = \frac{1}{6\left[k_1^{(3)} + 2k_2^{(3)} + 2k_3^{(3)} + k_4^{(3)}\right]} = \frac{1}{6[0.1700 + 0.3670 + 0.3684 + 0.1984]} = 0.1840$$
$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4; \qquad y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 1.3998 + 0.1840 = 1.5838.$

Для i=4 имеем

$k_1^{(4)} = hf(x_4, y_4) = 0.1 \cdot (0.4 + 1.5838) = 0.1984$
$k_2^{(4)} = hf\left(x_4 + \frac{h}{2}; y_4 + \frac{k_1^{(4)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.45 + 1.5838 + 0.0992) = 0.2133;$
$k_3^{(4)} = hf\left(x_4 + \frac{h}{2}; y_4 + \frac{k_2^{(4)}}{2}\right) = 0.1 \cdot (0.45 + 1.5838 + 0.1065) = 0.2140;$
$k_4^{(4)} = hf\left(x_4 + h; y_4 + k_3^{(4)}\right) = 0.1 \cdot (0.5 + 1.5838 + 0.2140) = 0.2298;$
$\Delta y_4 = \frac{1}{6}(0.1984 + 0.4266 + 0.4280 + 0.2298) = 0.2138;$
$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5; \qquad y_5 = y_4 + \Delta y_4 = 1.5838 + 0.2138 = 1.7976$
Сведём полученные данные в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1	1.1104	1.2429	1.3998	1.5838	1.7976

Пример 10. Решить методом Адамса дифференциальное уравнение $\frac{y'}{=\frac{1}{2}}xy$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0.5]$ с шагом $h = 0.1$.

Решение. При решении уравнения $\frac{y'}{= f(x,y)}$ с начальным условием методом Адамса используются следующие расчётные формулы:

$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta q_{i-1} \qquad (i \geq 1) \qquad (1)$

где $q_i = f(x_i, y_i) \cdot h, \qquad \Delta q_i = q_{i+1} - q_i, \qquad x_i = x_0 + ih.$

Формулой (1) можно пользоваться лишь в том случае, когда заранее известны значения y_0 и y_1. Значение y_0 задаётся начальным условием, а y_1 можно определить, например, исходя из разложения искомого решения в степенной ряд в окрестности начальной точки.

Запишем искомое решение в виде ряда:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots \qquad (2)$$

Свободный член разложения (2) , т.е. $y(0)$, дан по условию. Чтобы найти значения $y'(0), y''(0), y'''(0), \dots$ можно данное уравнение последовательно дифференцировать по переменной x и затем вычислить значения производных при x=0.

Значение $y'(0)$ получаем, подставив начальное условие в данное уравнение:

$$y'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$

$$y''(x) = \frac{1}{2}\left(y + xy'\right); \quad y''(0) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

$$y'''(x) = \frac{1}{2}\left(2y' + xy''\right); \quad y'''(0) = 0$$

$$y^{IV}(x) = \frac{1}{2}\left(3y'' + xy'''\right); \quad y^{IV}(0) = \frac{3}{4}$$

Подставив найденные значения производных при x=0 в (2), получим разложение искомого решения:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{32}x^4 + \dots$$

Исходя из полученного разложения искомого решения в ряд при $x_1 = 0 + 0.1 = 0.1$ получим $y_1 = 1 + \frac{1}{4(0.1)^2} = 1.0025.$

При i=2 имеем:

$x_2 = x_1 + 0.1 = 0.1 + 0.1 = 0.2; \quad y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{2}\Delta q_0$, где

$q_1 = f(x_1, y_1) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1.0025 \cdot 0.1 = 0.0050;$

$\Delta q_0 = q_1 - q_0 = 0.0050; \; y_2 = 1.0025 + 0.0050 + \frac{1}{2} \cdot 0.0050 = 1.0100.$

Значит, $x_2 = 0.2; \; y_2 = 1.0100.$

При i=3 имеем:

$x_3 = x_2 + 0.1 = 0.2 + 0.1 = 0.3; \quad y_3 = y_2 + q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1$, где

$q_2 = f(x_2, y_2) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot 1.0100 \cdot 0.1 = 0.0101;$
$\Delta q_1 = q_2 - q_1 = 0.0101 - 0.0050 = 0.0051;$
$y_3 = 1.0100 + 0.0101 + \frac{1}{2} \cdot 0.0051 = 1.0227.$
Значит, при $x_3 = 0.3$ получаем $y_3 = 1.0227.$

При i=4 имеем:

$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4; \quad y_4 = y_3 + q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2;$
$q_3 = f(x_3, y_3) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 0.3 \cdot 1.0227 \cdot 0.1 = 0.0153;$
$\Delta q_2 = q_3 - q_2 = 0.0153 - 0{,}0101 = 0.0052;$

Значит, при $x = 0.4$ получаем $y_4 = 1.0406.$

При i=5 имеем:

$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5; \quad y_5 = y_4 + q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3;$
$q_4 = f(x_4, y_4) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 1.0406 \cdot 0.1 = 0.0208;$
$\Delta q_3 = q_4 - q_3 = 0.0208 - 0.0153 = 0.0055;$

$$y_5 = 1.0406 + 0.0208 + \frac{1}{2} \cdot 0.0055 = 1.0642.$$

Значит, при $x = 0.5$; получаем $y_5 = 1.0642.$
Сведём полученные результаты в таблицу

i	x_i	y_i	$q_i = f(x_i, y_i)h$	$\Delta q_i = q_{i+1} - q_i$
0	0.0	1	0	0.0050
1	0.1	1.0025	0.0050	0.0051
2	0.2	1.0100	0.0101	0.0052
3	0.3	1.0227	0.0153	0.0055
4	0.4	1.0406	0.0208	
5	0.5	1.0642		

2.1.3. Вопросы для самоконтроля

1. Укажите источники и классификацию погрешностей результатов численного решения задачи.
2. Что называется абсолютной погрешностью приближённого числа? Относительной погрешностью?
3. Как определяются абсолютная и относительная погрешности арифметических операций над приближёнными числами?
4. Перечислите способы отделения действительных корней уравнения ***f(x)=0.***

5. В чём состоят методы хорд, касательных и комбинированный метод приближённого вычисления действительных корней уравнения ***f(x)=0*?**

6. В чём состоит метод итерации приближённого вычисления действительных коней уравнения ***f(x)=0*?**

7. В чём состоит метод итерации решения линейных систем? Приведите достаточные условия сходимости этого метода?

8. Как можно привести линейную систему к виду, удобному для итерации?

9. В чём состоит метод Зейделя решения линейных систем?

10. В чём состоит задача численного решения дифференциального уравнения?

11. Изложите метод Эйлера численного решения дифференциального уравнения первого порядка.

12. Изложите метод Адамса численного решения дифференциального уравнения.

13. Объясните с геометрической точки зрения различие между методами Эйлера и Адамса приближенного решения дифференциальных уравнений.

14. Почему метод Адамса нельзя применять с самого начала составления таблицы приближённых значений решения дифференциального уравнения, и каким методом можно найти недостающие начальные значения?

15. Изложите метод Рунге-Кутта численного решения дифференциального уравнения.

2.1.4. Задания для самостоятельной работы

1. Найти приближённое значение корней уравнения $x^3+4x-3=0$ с точностью до 0,01 методом хорд.

2. Пользуясь методом касательных, найти с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3+2x-7=0$.

3. Пользуясь комбинированным методом хорд и касательных, найти с точностью до 0,001 корень уравнения $x^3+x-1=0$.

4. Найти корень уравнения $x^3-x-1=0$ с точностью до 0,001 методом итерации.

5. Решить методом итерации систему уравнений.

6. Решить методами Эйлера и Рунге-Кутта дифференциальное уравнение $\frac{y^{\square}}{= x} - y$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0.5]$ с шагом $h = 0.1$.

7. Решить методом Адамса дифференциальное уравнение $\frac{y^{\square}}{= x^2} + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 1]$ с шагом $h = 0.1$.

Указание. Для вычисления y_1 найдите три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд искомого решения.

2.2. Модуль 2. Приближение функций

2.2.1.Содержание модуля

Постановка задачи приближения функции. Классы аппроксимирующих функций. Погрешность аппроксимации. Интерполяционные методы приближения функций. Конечные разности различных порядков. Интерполяционные полиномы Ньютона. Среднеквадратическое приближение функции с помощью многочлена. Метод наименьших квадратов.

2.2.2. Методические указания по его изучению

В практическом применении математики очень часто встречается такая задача. Зависимость между переменными величинами выражена в виде таблицы, полученной опытным путём. Требуется выразить эту зависимость между переменными аналитически, то есть дать формулу, связывающую между собой соответствующие значения переменных. Такая формула существенно облегчает анализ изучаемой зависимости. Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, называются эмпирическими формулами.

В тех случаях, когда характер зависимости между переменными величинами предполагается известным из каких-либо теоретических соображений, то задача подбора эмпирической формулы сводится с определению числовых значений параметров, входящих в формулу данного вида.

Чаще приходится встречаться с более общей и более сложной задачей: в результате наблюдений получен ряд значений переменных x и y, но истинный характер функциональной зависимости между ними остается неизвестным. Возникает задача подбора какой-либо формулы, которая наилучшим образом отражала бы полученные результаты.

Применяются два различных метода построения таких формул. Один из них состоит в том, что строится многочлен, принимающий в заданных точках заданные значения, а именно: по двум известным точкам строится линейная функция, по трём- квадратичная функция и т.п. Достоинство этого метода в том, что полученная формула в точности воспроизводит заданные значения. Такого рода формулы носят название интерполяционных формул.

Другой метод подбора эмпирических формул состоит в том, что по данным результатам наблюдений подбирается наиболее простая формула того или иного типа, дающая наилучшее приближение к имеющимся данным; при этом формула не воспроизводит в точности данных наблюдения. Чаще всего при подборе эмпирических формул пользуются принципом наименьших квадратов. Он основан на том, что из данного множества формул вида $y=f(x)$ наилучшим образом изображающей данные значения считается та, для которой сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от вычисленных является наименьшей. Подбор параметров функций $y=f(x)$, основанный на этом принципе, называется способом наименьших квадратов. Этот способ применяется при подборе параметров после того, как вид функции *y=f(x)* определён. Если из теоретических соображений нельзя сделать никаких выводов о том, какой должна быть эмпирическая формула, то можно воспользоваться графическим изображением наблюдаемых данных. Вид функции *y=f(x)* выбирается таким образом, чтобы график этой функции по возможности близко напоминал расположение на графике данных наблюдения.

Пусть задана таблица значений переменных *x* и *y* :

x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_1	y_2	y_3	…	y_n

и соответствующие точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)…M_n(x_n,y_n)$ располагаются вблизи некоторой прямой линии. В этом случае надо подобрать коэффициенты линейной функции $y=ax+b$ так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных значений ax_i+b от наблюдаемых значений y_i , т.е. величина

$$S= (ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+…+(ax_n+b-y_n)^2$$

принимала наименьшее значение.

Сумма

$$S= \sum_{i=1}^{n} \llbracket\left(ax_i\rrbracket + b - y_i\right)^2$$

является функцией двух переменных *a* и *b*, поэтому она принимает минимальное значение при тех значениях a и b, при которых обращаются в нуль частные производные этой функции по каждой переменной, т.е. когда $\frac{S_a}{\square}=0$ и $\frac{S_b}{\square}=0$.

Находим частные производные:

$$\frac{S_a}{=2\sum_{i=1}^{n}\llbracket(ax_i+b-y_i\rrbracket)x_i} = 2\left[a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right]$$

$$\frac{S_b}{=2\sum_{i=1}^{n}\llbracket(ax_i+b-y_i\rrbracket)} = 2\left[a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right]$$

Приравнивая каждую частную производную к нулю, получаем систему двух линейных уравнений относительно *a* и *b*:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Из этой системы находим *a* и *b*, затем подставляем их в нашу эмпирическую формулу *y=ax+b*. Полученная формула и даст приближенную зависимость между переменными *x* и *y*.

Пример 11 Опытные данные о значениях величин *x* и *y* представлены в таблице

x	2	4	6	8	10
y	5.5	8.5	13.6	17.3	20.1

Предполагая, что переменные *x* и *y* связаны линейной зависимостью *y=ax+b*, найти способом наименьших квадратов значения параметров *a* и *b*.

Решение. Для составления системы уравнений, из которой будем определять *a* и *b*, составим расчётную таблицу, и выполним необходимое суммирование по её столбцам:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	2	5.5	4	11
2	4	8.5	16	34
3	6	13.6	36	81.6
4	8	17.3	64	138.4
5	10	20.1	100	201
$\sum$	30	65	220	466

Из этой таблицы следует, что $\sum_{i=1}^{5} x_i = 30$,

$\sum_{i=1}^{5} y_i = 65$, ,

Подставив эти значения в указанную систему, получим

$\begin{cases} 220a + 30b = 466 \\ 30a + 5b = 65 \end{cases}$; $\begin{cases} 220a + 30b = 466 \\ 180a + 30b = 390 \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$40a = 76$, значит, *a*=1.9

Подставив a=1.9 во второе уравнение, имеем

Таким образом, зависимость между переменными x и y выражается формулой $y = 1.9x + 1.6$.

В случае квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ следует рассматривать сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2,$$

которая является функцией трёх переменных a, b и c. Она принимает минимальное значение при тех значениях a, b и c, при которых обращаются в нуль частные производные этой функции по каждой переменной. Находя эти частные производные и приравнивая каждую из них нулю, получим систему уравнений для определения параметров a, b и c:

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + c\cdot n = \sum y_i \end{cases}$$

Пример 12. Значения переменных x и y, полученные в результате опыта, представлены в таблице

x	0	1	2	3	4
y	4	1.5	1	2.5	5

Предполагая, что переменные x и y связаны зависимостью $y = ax^2 + bx + c$, найти значения параметров a, b и c.

Решение. Для вычисления величин, входящих в последнюю систему, составим расчётную таблицу

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	0	4	0	0	0	0	0
2	1	1.5	1	1	1	1.5	1.5
3	2	1	4	8	16	2	4
4	3	2.5	9	27	81	7.5	22.5
5	4	5	16	64	256	20	80
$\sum$	10	14	30	100	354	31	108

Данные таблицы приводят к системе

$$\begin{cases} 354a + 100b + 30c = 108 \\ 100a + 30b + 10c = 31 \\ 30a + 10b + 5c = 14 \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим *c*:

Подставим это значение *c* в первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} 354a + 100b + 6(14 - 30a - 10b) = 108 \\ 100a + 30b + 2(14 - 30a - 10b) = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 174a + 40b = 24 \\ 40a + 10b = 3 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 4 и вычтем потом из первого уравнения полученное второе:

$$-\begin{cases} 174a + 40b = 24 \\ 160a + 40b = 12 \end{cases} \qquad 14a = 12 \qquad a = \frac{12}{14} = \frac{6}{7},$$

$$40 \cdot \frac{6}{7} + 10b = 3, \qquad 10b = -\frac{219}{7}, \qquad b = -\frac{219}{70}.$$

Теперь находим *c*:

Следовательно, искомая зависимость между переменными *x* и *y* выражается формулой:

$$y = \frac{6}{7}x^2 - \frac{219}{70}x + \frac{137}{35}.$$

При выравнивании опытных данных по гиперболе, выражаемой формулой $y = a + \frac{b}{x}$, применение способа наименьших квадратов приводит к рассмотрению суммы вида

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b}{x_i} - y_i\right)^2.$$

являющейся функцией двух неизвестных параметров a и b. Эти параметры являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} \end{cases}$$

Во многих случаях по данным наблюдения, представленным таблицей значений x и y, непосредственно нельзя установить какого вида функция $y = f(x)$ даёт возможность замены табличного задания аналитическим выражением зависимости между x и y. При этом отпадает возможность использования способа наименьших квадратов. В таких случаях обычно выбирают $f(x)$ в виде полинома $P(x)$, если только табличные данные не указывают на периодичность в характере изменения значений y. Основанием для замены искомой функции полиномом служит доказанная Вейерштрассом теорема: любая функция $f(x)$, непрерывная в промежутке (a,b), может быть заменена в этом промежутке полиномом $P(x)$.

При табличном задании функции для равноотстоящих значений аргумента x аналитическое выражение соответствующей функции в виде полинома $P(x)$ может быть получено с помощью интерполяционной формулы Ньютона, которая устанавливает и порядок, и коэффициенты искомого полинома.

В этой формуле используются конечные разности функции, представленной табличным способом. Если даны значения функции $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, то для них существует n первых конечных разностей:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1},$$

Разности первых разностей, или вторые разности, выражаются так:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \quad \Delta^3 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$$ и т.д.

Таким же образом выражаются третьи разности:

т.д.

Пример 13. Найти конечные разности для функций, заданной таблицей

x	3.50	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.12	34.82	36.60	38.48	40.49

Решение. 1) Первые разности:

$\Delta y_0 = 34.82 - 33.12 = 1.70;\quad \Delta y_1 = 36.60 - 34.82 = 1.78;$
$\Delta y_2 = 38.48 - 36.60 = 1.88;\quad \Delta y_3 = 40.49 - 38.48 = 2.01;$
2) Вторые разности:
$\Delta^2 y_0 = 1.78 - 1.70 = 0.08;\quad \Delta^2 y_1 = 1.88 - 1.78 = 0.10;$
$\Delta^2 y_2 = 2.01 - 1.88 = 0.13.$
3) Третьи разности:
$\Delta^3 y_0 = 0.10 - 0.08 = 0.02;\quad \Delta^3 y_1 = 0.13 - 0.10 = 0.03$
4) Четвёртые разности:
$\Delta^4 y_0 = 0.03 - 0.02 = 0.01$
Используя полученные результаты, можно составить таблицу, содержащую значения *x, y* и конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
3.50	33.12	1.70	0.08	0.02	0.01
3.55	34.82	1.78	0.10	0.03	
3.60	36.60	1.88	0.13		
3.65	38.48	2.01			
3.70	40.49				

Интерполяционный полином Ньютона *P(x)* связан с табличной функцией условием $P(x_i) = y_i$ для всех значений x_i, в которых табличная функция определена, и имеет вид:
$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdot \cdots$$
Его коэффициенты находятся по формулам
$$a_0 = y_0;\quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h};\quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2};\quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3};\ldots\ a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n},$$
где Δy_0 - первая конечная разность, $\Delta^2 y_0$ - вторая конечная разность, $\Delta^3 y_0$ - третья конечная разность и т.д., $h=x_1-x_0$- шаг интерполяции (разность между двумя соседними значениями аргумента *x* в таблице).

Пример 14. Построить интерполяционный полином Ньютона третьей степени для функции, заданной следующей таблицей

x	1	2	3	4	5	6
y	3.02	7.85	25.11	60.05	117.92	203.97

Решение. Составим таблицу, содержащую значения *x* , *y* и конечные разности:

x	*y*	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3.02	4.83	12.43	5.25
2	7.85	17.26	17.68	5.25
3	25.11	34.94	22.93	5.25
4	60.05	57.87	28.18	

5	117.92	86.05		
6	203.97			

Соответствующий полином имеет вид

$P(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + a_3(x-1)(x-2)(x-3).$

Используя конечные разности из этой таблицы и, учитывая, что в нашем случае h=1, вычислим коэффициенты этого полинома:

$a_0 = y_0 = 3.02;\quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h} = 4.83;\qquad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} = \frac{12.43}{2} = 6.215$

Искомый полином будет

$P(x) = 3.02 + 4.83(x-1) + 6.215(x-1)(x-2) + 0.875(x-1)(x-2)(x-3).$

После преобразований получим

$P(x) = 0.875x^3 + 0.965x^2 - 4.190x + 5.37.$

2.2.3. Вопросы для самоконтроля

1. Как ставится задача интерполирования функции?
2. Напишите интерполяционную формулу Лагранжа.
3. Каким образом проводятся линейная и квадратичная интерполяция функций?
4. Как определяются конечные разности различных порядков функции, заданной таблично?
5. Напишите интерполяционную формулу Ньютона.
6. Почему для равноотстоящих узлов пользоваться полиномом Ньютона удобнее, чем полиномом Лагранжа?
7. В чём сущность подбора эмпирических формул по способу наименьших квадратов?

2.2.4. Задания для самостоятельной работы

1.Зная, что $f(1) = -2.23$ и $f(2) = 1.05$, найти приближённо $f(1{,}3)$, используя линейную интерполяцию.

2. На основании эксперимента получены значения функции $y = f(x)$:
$y_0 = 4$ при $x_0 = 0$; $y_1 = 6$ при $x_1 = 1$; $y_2 = 10$ при $x_2 = 3$.

Требуется представить приближённо функцию $y = f(x)$ многочленом второй степени, используя интерполяционную формулу Лагранжа.

3. Построить на отрезке [0;5] интерполяционный полином Ньютона для функции, заданной таблицей

x	0	1	2	3	4	5
y	5.2	8.0	10.4	12.4	14.0	15.2

4.Опытные данные о значениях величин *x* и *y* представлены в таблице

x	4	5	6	8	9
y	20	24	29	35	50

Предполагая, что переменные *x* и *y* связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти способом наименьших квадратов значения параметров *a* и *b*.

2.3. Модуль 3. Численные методы дифференцирования и интегрирования

2.3.1. Содержание модуля

Тема 3.1. Численное дифференцирование

Постановка задачи численного дифференцирования. Формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности. Численное дифференцирование в начале и конце таблицы. Оценка погрешности.

Тема 3.2. Численное интегрирование

Постановка задачи численного интегрирования. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона приближённого вычисления определённых интегралов. Оценка погрешностей этих формул.

2.3.2.Методические указания по его изучению

Тема 3.1

При решении практических задач часто нужно найти производные указанных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблично. В этих случаях обычно прибегают к приближённому дифференцированию. Для этого заменяют данную функцию на интересующем отрезке [*a*,*b*] интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают $\frac{f^{\square}}{\square}(x) = \frac{P^{\square}}{\square}(x)$ при $a \le x \le b$. Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции $y = f(x)$.

Если для интерполирующей функции *P*(*x*) известна погрешность

, то погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. То же самое справедливо для производных высших порядков.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование.

Пример 15. Найти , заданной таблично

x	10	12	14	16	18	20
y	2.3026	2.4849	2.6391	2.7726	2.8904	2.9957

Решение. Для вычисления указанных производных воспользуемся следующими формулами:

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-\dots\right)$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\cdots\right)$$

где $h=x_{i+1}-x_i$ $(i=0.1,\dots)$, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0,\dots$ – конечные разности заданной функции.

У нас h=2. Составим таблицу конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
10	2.3026	0.1823	-0.0281	0.0074	-0.0024	0.0006
12	2.4849	0.1542	-0.0207	0.0050	-0.0018	
14	2.6391	0.1335	-0.0157	0.0032		
16	2.7726	0.1178	-0.0125			
18	2.8904	0.1053				
20	2.9957					

Используя первую строчку таблицы, на основании приведенных формул, с точностью до разностей пятого порядка, будем иметь:

$$y'(10)=\frac{1}{2}\left(0.1823+\frac{0.0281}{2}+\frac{0.0074}{3}+\frac{0.0024}{4}+\frac{0.0006}{5}\right)=0.0998.$$

$$y''(10)=\frac{1}{4}\left(-0.0281-0.0074+\frac{11}{12}(-0.0024)-\frac{5}{6}\cdot 0.0006\right)=-0.0096$$

Пример 16. Путь $y=f(t)$, пройденный прямолинейно движущимся телом за время t, даётся следующей таблицей:

Время t (мин)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Путь $y(t)$ (м)	0	1.6	3.2	16.8	78.4	260	681.6	1523.2	3036.8

Используя конечные разности до пятого порядка включительно, найти приближённо скорость $V=\frac{dy}{dt}$ и ускорение $a=\frac{d^2y}{dt^2}$ тела для моментов $t=0;1;2;3$.

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0	1.6	0	12	24	12
1	1.6	1.6	12	36	36	12
2	3.2	13.6	48	72	48	12
3	16.8	61.6	120	120	60	12
4	78.4	181.6	240	180	72	
5	260	421.6	420	252		
6	681.6	841.6	672			
7	1523.2	1513.6				
8	3036.8					

Полагая *h=1* и применяя формулы, получаем приближённые значения величины скорости V (м/мин) и величины ускорения *a* (м/мин^2):

$$V(0) = 1.6 - 0 + 4 - 6 + 2.4 = 2; \quad a(0) = 0 - 12 + \frac{11}{24}\cdot 24 - \frac{5}{6}\cdot 12 = 0.$$

$$V(1) = 1.6 - \frac{12}{2} + \frac{36}{3} - \frac{36}{4} + \frac{12}{5} = 1; \quad a(1) = 12 - 36 + \frac{11}{12}\cdot 36 - \frac{5}{6}\cdot 12 = -1.$$

$$V(2) = 13.6 - \frac{48}{2} + \frac{72}{3} - \frac{48}{4} + \frac{12}{5} = 4; \quad a(2) = 48 - 72 + \frac{11}{12}\cdot 48 - \frac{5}{6}\cdot 12 = 10.$$

$$V(3) = 61.6 - \frac{120}{2} + \frac{120}{3} - \frac{60}{4} + \frac{12}{5} = 29;$$

$$a(3) = 120 - 120 + \frac{11}{12}\cdot 60 - \frac{5}{6}\cdot 12 = 45.$$

Тема 3.2.

Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a*,*b*] и известна её первообразная *F*(x), то определённый интеграл от этой функции в пределах от *a* до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Однако во многих случаях первообразная F(*x*) не может быть выражена через элементарные функции. Поэтому вычисление определённого интеграла в этих случаях по формуле Ньютона-Лейбница практически невыполнимо. Кроме того, на практике подынтегральная функция часто задаётся таблицей и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определённых интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определённого интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции. Обычный приём решения этой задачи состоит в том, что данную функцию *f(x)* на рассматриваемом отрезке $[a,b]$ заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближённого полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Наиболее употребительны для приближённого вычисления определённых интегралов формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Пример 17. Вычислить приближённое значение определённого интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на десять равных частей. Оценить погрешность.

Решение. Чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_b^a f(x)dx$ по формуле трапеций надо:

1) разделить отрезок интегрирования $[a,b]$ на *n* равных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$;

2) вычислить значения подынтегральной функции *y=f(x)* в точках деления, то есть найти $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$;

3) воспользоваться формулой трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

Формула трапеций для данных условий принимает следующий вид:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{10}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right)$$

Вычислим значения подынтегральной функции $y = \frac{1}{x}$ в соответствующих точках деления. Расчёты оформим в виде таблицы:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y	1	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

Подставляя в приведённую формулу полученные значения, имеем

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0.1\left(\frac{1+0.5}{2} + 0.9091 + 0.8333 + 0.7692 + 0.7143 + 0.6667 + 0.6250 + 0.5882\right.$$

Оценим допущенную погрешность. Если подынтегральная функция $y=f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные f' и $f''(x)$, то для оценки погрешности δ_n при вычислении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле трапеций служит неравенство

$$|\delta_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2,$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке [a,b].

В нашем случае $y = \frac{1}{x}$; $y' = -\frac{1}{x^2}$; $y'' = \frac{2}{x^3}$.

Так как вторая производная $y'' = \frac{2}{x^3}$ на заданном отрезке [1,2] монотонно убывает, то наибольшее значение она будет иметь при x=1. Значит,

$M_2 = y''(1) = 2.$ Тогда $|\delta_n| = |\delta_{10}| \le \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 2 \le 0.002.$

Пример 18. Вычислить приближенное значение определённого интеграла $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей.

Решение. Формула Симпсона имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]},$$

где n-чётное число.

Разбиваем отрезок интегрирования [0;1] на десять равных частей, и пользуясь таблицей значений показательной функции(см. например, «Справочник по математике» И.Н. Бронштейна и К.А.Семендяева), находим значения подынтегральной функции $y = e^{x^2}$ в точках деления:

$x_0 = 0,$ $y_0 = 1.0000;$ $x_1 = 0.1,$ $y_1 = 1.0101;$
$x_2 = 0.2,$ $y_2 = 1.0408;$ $x_3 = 0.3,$ $y_3 = 1.0942;$
$x_4 = 0.4,$ $y_4 = 1.1735;$ $x_5 = 0.5,$ $y_5 = 1.2840;$
$x_6 = 0.6,$ $y_6 = 1.4333;$ $x_7 = 0.7,$ $y_7 = 1.6323;$
$x_8 = 0.8,$ $y_8 = 1.8965;$ $x_9 = 0.9,$ $y_9 = 2.2478;$
$x_{10} = 1,$ $y_{10} = 2.7183;$

По формуле Симпсона при n=10 имеем

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{30[y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]}$$

Подставляем сюда найденные значения:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{30}[1.0000 + 2.7183 + 4(1.0101 + 1.0942 + 1.2840 + 1.6323 + 2.2478) + 2(1$$

2.3.3. Вопросы для самоконтроля

1. Как ставится задача численного дифференцирования? Как она решается?
2. Запишите формулы для вычисления производных первого и второго порядков функции одной переменной, заданной таблично, в основных табличных точках. Как оценивается погрешность этих формул?
3. Как ставится задача численного интегрирования?
4. Запишите формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу Симпсона для приближённого вычисления определённого интеграла.

2.3.4. Задания для самостоятельной работы

1. Найти $\frac{y^{\square}}{\square}(50)$ функции, заданной таблично:

x	50	55	60	65	70
y	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129	1,8451

2. Найти функции, заданной таблично:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487	1,8221

3. Вычислить интеграл по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на пять равных частей.

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{5 + x^3}dx$ по формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на десять равных частей.

5. Вычислить интеграл $\int_0^8 \sqrt[3]{9x - 8}dx$ по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на восемь равных частей.

Примечание. В задачах 3-5 все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

2.4. Модуль 4. Элементы линейного программирования

2.4.1. Содержание модуля

Постановка и различные формы записи задач линейного программирования. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Основные свойства задач линейного программирования: выпуклость множества допустимых решений, существование базисных оптимальных решений.

2.4.2. Методические указания по его изучению

Линейное программирование изучает задачи поиска экстремума функции нескольких переменных при наличии ограничений, наложенных на эти переменные, причём и сама эта функция нескольких переменных и все ограничения являются линейными относительно эти переменных.

Математическая модель задачи линейного программирования включает следующее:

1)Совокупность переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, каждый набор значений которых называется планом этой задачи.

2)Целевую функцию $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая позволяет выбирать оптимальный, т.е. наилучший план из множества возможных планов. Наилучший план должен давать целевой функции экстремальное значение.

3)Систему ограничений на план задачи, представленную в виде уравнений или неравенств. Система ограничений дополняется требованием неотрицательности значений всех переменных.

Решения системы ограничений образуют область допустимых решений (планов) задачи. Допустимый план $x^* = (x^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, дающий целевой функции экстремальное значение (заданное в виде максимума или минимума), называется оптимальным планом и является решением задачи линейного программирования.

В случае двух переменных задачу линейного программирования можно решить геометрическим методом. Пусть математическая формулировка задачи линейного программирования имеет вид

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 (\geq \text{ или } \leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 (\geq \text{ или } \leq) b_2 \\ - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 (\geq \text{ или } \leq) b_m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Геометрический метод решения этой задачи состоит в следующем.

1. На координатной плоскости x_1Ox_2 строится множество Х, которое образует множество допустимых решений задачи.

Эта область представляет собой пересечение всех полуплоскостей, которые по отдельности являются решениями неравенств, входящих в систему ограничений. Если система ограничений несовместна, то задача не имеет решения.

Отметим, что областью решений линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того, чтобы определить, какая из этих двух полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку. В противном случае областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

2. Строится вектор и линия уровня l целевой функции. Линия уровня l - прямая, перпендикулярная указанному вектору и проходящая, например, через начало координат.

3. Строится семейство линий уровня целевой функции, представляющих собой прямые, параллельные l. Значение целевой функции постоянно на линии уровня и возрастает при перемещении линии уровня в направлении вектора

Если при этом точка $A(x_{1A}, x_{2A})$ является первой единственной точкой встречи линий уровня с областью допустимых решений, то она будет точкой решения задачи линейного программирования при $L \to \min$, а если точка $B(x_{1B}, x_{2B})$ - последняя общая точка при таком перемещении, то эта точка- решение задачи при $L \to max$.

Если при таком перемещении окажется, то линия уровня совпадает с одной из сторон области допустимых решений, то задача линейного программирования имеет бесконечное множество решений.

Если окажется, что первой (последней) точки не существует, то задача отыскания min(max) целевой функции является не разрешимой.

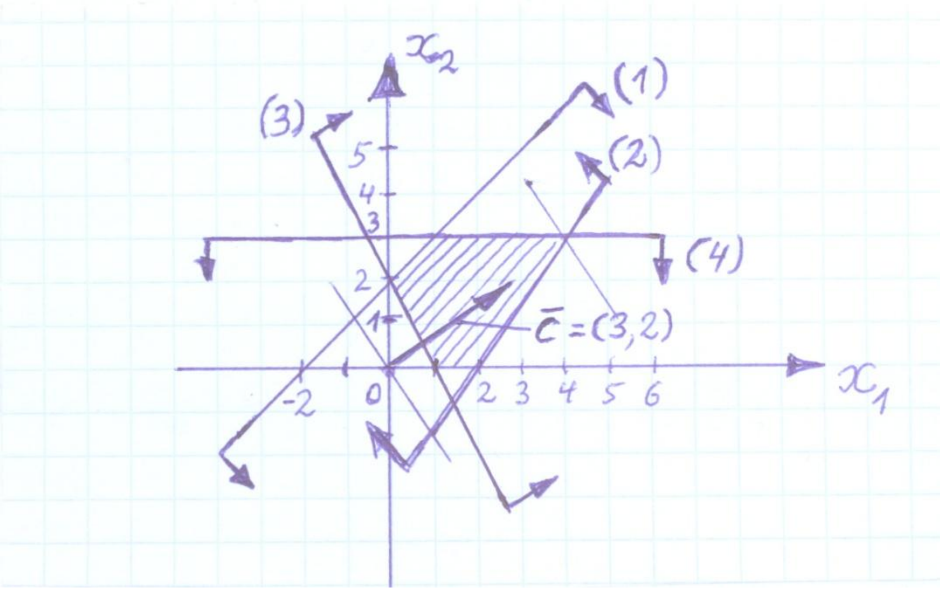
Пример 19. Решить задачу линейного программирования

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \ge 0 & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \le 0 & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \ge 0 & (3) \\ x_2 \le 3 & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений задачи. Для этого пронумеруем ограничения задачи.

В прямоугольной системе координат, изображённой на рисунке, строим прямую $x_1 - x_2 + 2 = 0$, соответствующую ограничению (1). Находим, какая из полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю плоскость, является областью решений неравенства (1).



Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство (1). Подставляя координаты точки O(0,0) в первое ограничение, получим 0-0+2≥ 0 , то есть получаем верное неравенство. Следовательно, точка O(0,0) лежит в полуплоскости решений. Аналогично

строим прямые и области решений ограничений (2),(3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности переменных. Полученную область допустимых решений отметим на рисунке штриховкой. По коэффициентам целевой функции строим вектор и одну из линий уровня, перпендикулярную этому вектору и проходящую, например, через начало координат.

Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня параллельно перемещаем в направлении вектора до точки выхода её из области допустимых решений. Эта точка является точкой пересечения прямых, соответствующих неравенствам (2) и (4). Поэтому её координаты можно найти, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 4, x_2 = 3,$ то есть, $A(4,3)$.

Вычисляем $L(A) = L(4,3) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$

Значит, $\max L = 18$ при $x_1 = 4, x_2 = 3.$

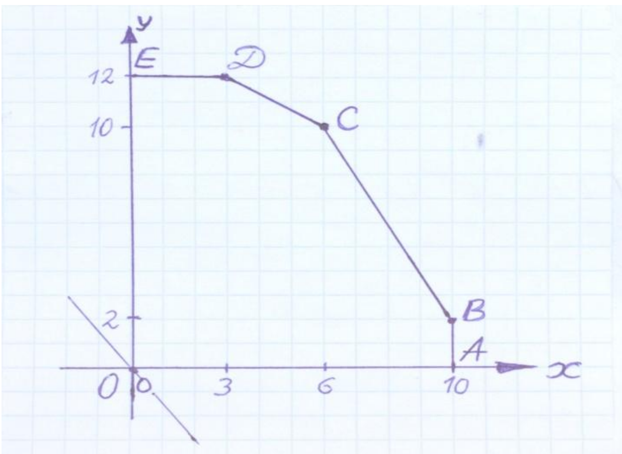
Пример 20. Завод выпускает изделия двух типов, при этом используется четыре вида сырья. Оно имеется в следующих количествах: 42 единицы сырья первого вида, 10 единиц сырья второго вида, 12 единиц сырья третьего вида и 22 единицы сырья четвёртого вида. На изготовление единицы изделий первого типа нужно израсходовать (2;1;0;2) единиц указанных видов сырья, а для второго типа изделий эти показатели равны (3;0;1;1) (нуль означает, что данное сырье не требуется для изготовления данного типа изделий). Выпуск одного изделия первого типа приносит три денежных единицы прибыли, одного изделия второго типа- две денежные единицы. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Решение. Пусть завод выпускает x единиц изделий первого типа и y единиц изделий второго типа. Для этого потребуется ($2x$+$3y$) единиц сырья первого вида, x единиц сырья второго вида, y единиц сырья третьего вида и ($2x$+y) единиц сырья четвёртого вида. Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} 2x+3y\le 42 \\ x\le 10 \\ y\le 12 \\ 2x+y\le 22 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{cases} \quad (*)$$

Прибыль при таком плане производства равна $P=3x+2y$. Требуется найти такое решение системы (*), при котором функция $P=3x+2y$ принимает наибольшее значение.

Решим задачу графическим методом. В прямоугольной системе координат X O $У$ строим прямые линии $x=0(OE), x=10(AB), y=0(OA), y=12(ED), 2x+3y=42(CD), 2x+y=22(BC)$, соответствующие неравенствам системы ограничений, и находим полуплоскости, являющиеся областями решений этих неравенств.



Значения x и y, удовлетворяющие системе ограничений, являются координатами точек, лежащих внутри и на границе многоугольника OABCDE.

Строим одну из линий уровня, проходящую, например, через начало координат. Это прямая Так как прямая l не параллельна ни одной из сторон многоугольника OABCDE, то для нахождения решения системы (*), для которого функция $P=3x+2y$ принимает наибольшее значение, достаточно найти значения этой функции в вершинах O,A,B,C,D,E построенного многоугольника и из полученных чисел выбрать наибольшие. В нашей задаче эти вершины имеют следующие координаты: $O(0,0), A(10,0), B(10,2), C(6,10), D(3,12), E(0,12)$. Подставляя координаты этих точек в правую часть равенства $P=3x+2y$, получим:

$P(A)=P(10;0)=30;$ $P(B)=P(10;2)=34;$ $P(C)=P(6;10)=38$
$P(D)=P(3;12)=33;$ $P(E)=P(0;12)=24;$ $P(O)=P(0;0)=0$

Следовательно, $Pmax=P(6;10)=38.$ Значит, заводу следует выпускать 6 единиц изделий первого типа и 10 единиц изделий второго типа. В этом случае прибыль от реализации выпущенных изделий будет наибольшей и составит 38 денежных единиц.

2.4.3. Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры задач, приводящих к задаче линейного программирования.
2. Что включает математическая модель задачи линейного программирования?
3. Дайте определения плана и целевой функции в задаче линейного программирования.
4. Какая форма задачи линейного программирования называется стандартной? канонической?
5.Когда применяется геометрический метод решения задач линейного программирования? Изложите алгоритм геометрического метода.
6. Перечислите основные свойства задач линейного программирования.

2.4.4. Задания для самостоятельной работы

1.Решить задачи линейного программирования графическим методом.

1.1. $L=4x_1+2x_2\rightarrow max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1-x_2\geq 0\\ 2x_1+x_2\geq 6\\ x_1+2x_2\leq 16\\ x_1\leq 4\\ x_1-x_2\leq 0\end{cases}$$

1.2. $L=2x_1+x_2+3\rightarrow min$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1-x_2\geq -2\\ x_1-3x_2\geq -10\\ x_1+2x_2\geq 4\\ x_1\leq 8\\ x_2\geq 0\end{cases}$$

2. На фабрике для производства двух видов продукции используется три вида сырья. Оно имеется в следующих количествах: 80 единиц сырья первого вида, 60 единиц сырья второго вида и 44 единицы сырья третьего вида. На производство единицы продукции первого вида нужно израсходовать(4;0;4) единиц указанных видов сырья, а для второго вида продукции эти показатели равны(4;6;0) (нуль означает, что данное сырьё не требуется для производства продукции данного вида). Прибыль, получаемая от реализации единиц первого вида продукции, равна пяти условным единицам, а от реализации единицы

второго вида продукции равна шести таким же единицам. Спланировать работу фабрики так, чтобы была обеспечена максимальная прибыль от реализации произведённой продукции.

Раздел 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ЕЁ ВЫПОЛНЕНИЮ

3.1. Методические указания по выполнению контрольной работы

В соответствии с действующим учебным планом студенты-заочники по направлению подготовки 110800-“Агроинженерия” по дисциплине “Прикладная математика” выполняют одну контрольную работу, а по направлению подготовки 230400 “Информационные системы и технологии” контрольной работы нет.

К выполнению контрольной работы следует приступать после изучения соответствующего материала по учебнику и решения задач, указанных к каждому модулю. Следует также внимательно разобрать решения тех задач, которые приведены в данном пособии.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже привил.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного. На обложке тетради должно быть ясно написаны фамилия и инициалы студента, полный учебный шифр. В конце работы следует указать использованную литературу, поставить дату окончания работы и расписаться.

2. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержание не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.

3. Задачи контрольной работы следует располагать в порядке возрастания их номеров. Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля 3-4см.

4. Перед решением каждой задачи надо записать полностью её условие. В том случае, когда несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задач, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

5. Решения задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. <u>Не допускаются сокращения слов, кроме общепринятых.</u> Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи должны быть выполнены аккуратно. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

6. Контрольная работа должна выполняться <u>самостоятельно</u>, в противном случае студент лишается возможности проверить степень своей подготовленности по дисциплине. <u>Если будет установлено, что контрольная</u>

работа выполнена не самостоятельно, то она не будет зачтена, даже если в ней все задачи решены верно.

7. Получив прорецензированную контрольную работу, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и представить их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае незачёта работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново. При представленных исправлениях должны обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

8.) В межсессионный период или во время лабораторно-экзаменационной сессии студент должен пойти собеседование по зачтённой контрольной работе.

9.) Студент выполняет вариант контрольной работы, совпадающий с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечётное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1. Если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число чётное (2, 4, 6, 8) или ноль, то номера задач даны в таблице 2.

Таблица 1

Номера варианта	Номера задач						
1	1	21	41	61	81	101	121
2	2	22	42	62	82	102	122
3	3	23	43	63	83	103	123
4	4	24	44	64	84	104	124
5	5	25	45	65	85	105	125
6	6	26	46	66	86	106	126
7	7	27	47	67	87	107	127
8	8	28	48	68	88	108	128
9	9	29	49	69	89	109	129
0	10	30	50	70	90	110	130

Таблица 2

Номера варианта	Номера задач						
1	11	31	51	71	91	111	131

2	12	32	52	72	92	112	132
3	13	33	53	73	93	113	133
4	14	34	54	74	94	114	134
5	15	35	55	75	95	115	135
6	16	36	56	76	96	116	136
7	17	37	57	77	97	117	137
8	18	38	58	78	98	118	138
9	19	39	59	79	99	119	139
0	20	40	60	80	100	120	140

3.2. Задачи для контрольной работы

В задачах **1-20** определить количество действительных корней уравнения $f(x)=0$, отделить эти корни и, применяя метод хорд и касательных, найти их приближённое значение с точностью до 0,001

1. $x^3+2x-1=0$
2. $x^3+2x-4=0$
3. $x^3+3x+1=0$
4. $x^3+7x+9=0$
5. $x^3+7x-1=0$
6. $x^3+2x-5=0$
7. $x^3+3x+2=0$
8. $x^3+3x+8=0$
9. $x^3+7x-6=0$
10. $x^3+7x+5=0$
11. $x^3+3x-1=0$
12. $x^3+2x-11=0$
13. $x^3+x-3=0$
14. $x^3+x+1=0$
15. $x^3+x-1=0$
16. $x^3+3x-3=0$
17. $x^3+4x-1=0$
18. $x^3+4x+2=0$
19. $x^3+4x-3=0$
20. $x^3+5x-3=0$

В задачах **21-40** результаты измерений величин x и y даются таблицей. Предполагая, что между переменными x и y существует линейная функциональная зависимость $y=ax+b$, найти, пользуясь способом наименьших квадратов, эту функцию. Вычислить с помощью полученной формулы приближённые значения y при $x= 2,5$ и $x=6$.

21.

x	1	2	3	4	5
y	4.8	5.8	4.3	2.3	2.8

22.

x	1	2	3	4	5
y	3.2	4.2	2.7	0.7	1.2

23.

x	1	2	3	4	5

24.

x	1	2	3	4	5

y	3.4	4.4	2.9	0.9	1.4

y	4.6	5.6	4.1	2.1	2.6

25.

x	1	2	3	4	5
y	3.6	4.6	3.1	1.1	1.6

26.

x	1	2	3	4	5
y	4.4	5.4	3.9	1.9	2.4

27.

x	1	2	3	4	5
y	4.1	5.1	3.6	1.6	2.1

28.

x	1	2	3	4	5
y	3.8	4.8	3.3	1.3	1.8

29.

x	1	2	3	4	5
y	2.8	3.8	2.3	0.3	0.8

30.

x	1	2	3	4	5
y	5.2	6.2	4.7	2.7	3.2

31.

x	1	2	3	4	5
y	5.4	6.4	4.9	2.9	3.4

32.

x	1	2	3	4	5
y	3.5	4.8	5.8	7.1	8.2

33.

x	1	2	3	4	5
y	0.3	2.6	5	7.5	10

34.

x	1	2	3	4	5
y	1.0	4.2	7.5	10.5	13.8

35.

X	1	2	3	4	5
y	4.0	5.0	3.5	1.5	2.0

36.

X	1	2	3	4	5
y	0.8	4.1	7.3	10.6	14.0

37.

x	1	2	3	4	5
y	3.8	5.3	6.7	8.4	9.7

38.

x	1	2	3	4	5
y	1.1	4.4	7.9	11.4	14.7

39.

x	1	2	3	4	5
y	1.2	3.8	6.7	9.2	12

40.

x	1	2	3	4	5
y	0.5	3.6	7.0	10.1	13.2

В задачах **41-60** построить интерполяционный полином Ньютона для функции, заданной таблично. С помощью полученного полинома найти приближённое значение функции в точке z.

41. $z=4.5$

x	4	5	6	7
y	1.3863	1.6094	1.7918	1.9459

42. $z=13$

x	12	14	16	18
y	1.0792	1.1461	1.2041	1.2553

43. $z=0.6$

x	0.5	0.7	0.9	1.1
y	1.6487	2.0138	2.4596	3.0042

44. $z=7.5$

x	7	8	9	10
y	1.9459	2.0794	2.1972	2.3026

45. $z=12.5$

x	11	12	13	14
y	1.0414	1.0792	1.1139	1.1461

46. $z=0.7$

x	0.6	0.8	1.0	1.2
y	1.8221	2.2255	2.7183	3.3201

47. $z=6.5$

x	3	5	7	9
y	1.0986	1.6094	1.9459	2.1972

48. $z=32$

x	25	35	45	55
y	1.3679	1.5441	1.6532	1.7404

x	1	1.2	1.4	1.6

49.

y	2.7183	3.3201	4.0552	4.9530

z=1.1

50.

x	10	12	14	16
y	2.3026	2.4849	2.6391	2.7726

z=11.5

51.

x	40	45	50	55
y	1.6021	1.6532	1.6990	1.7404

z=42

52.

x	0.2	0.4	0.6	0.8
y	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

z=0.3

53.

x	20	25	30	35
y	2.9957	3.2189	3.4012	3.5554

z=22

54.

x	20	22	24	26
y	1.3010	1.3424	1.3802	1.4150

z=23

55.

x	1.3	1.5	1.7	1.9
y	3.6693	4.4817	5.4739	6.6859

z=1.4

56.

x	30	35	40	45
y	3.4012	3.5554	3.6889	3.8067

z=32

57.

x	30	35	40	45
y	1.4771	1.5441	1.6021	1.6532

z=38

58.

x	1.6	1.8	2.0	2.2
y	4.9530	6.0496	7.3891	9.0250

z=1.9

59.

x	10	15	20	25
y	2.3026	2.7081	2.9957	3.2189

z=14

60.

x	20	25	30	35
y	1.3010	1.3979	1.4771	1.5441

z=22

В задачах **61-80** функция *y=f(x)* задана таблицей. Используя конечные разности до пятого порядка включительно, найти приближённые значения первой и второй производных этой функции в первых двух табличных точках.

61.

x	2	3	4	5	6	7	8
y	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094	1.7918	1.9459	2.0794

62.

x	16	17	18	19	20	21	22
y	2.7726	2.8332	2.8904	2.9444	2.9957	3.0445	3.0910

63.

x	8	9	10	11	12	13	14
y	2.0794	2.1972	2.3026	2.3979	2.4849	2.5650	2.6391

64.

x	10	11	12	13	14	15	16
y	4.6052	4.7958	4.9692	5.1299	5.2781	5.4161	5.5452

65.

x	12	13	14	15	16	17	18
y	2.4849	2.5650	2.6391	2.7080	2.7726	2.8332	2.8904

66.

x	50	55	60	65	70	75	80
y	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129	1.8451	1.8751	1.9031

67.

x	20	25	30	35	40	45	50
y	1.3010	1.3979	1.4771	1.5441	1.6021	1.6532	1.6990

x	11	16	21	26	31	36	41

68.

y	1.0414	1.2041	1.3222	1.4150	1.4914	1.5563	1.6128

69.

x	12	17	22	27	32	37	42
y	1.0792	1.2304	1.3424	1.4314	1.5051	1.5682	1.6232

70.

x	14	19	24	29	34	39	44
y	1.1461	1.2788	1.3802	1.4624	1.5315	1.5911	1.6435

71.

x	3	5	7	9	11	13	15
y	0.4771	0.6990	0.8451	0.9542	1.0414	1.1139	1.1761

72.

x	2	4	6	8	10	12	14
y	0.3010	0.6021	0.7782	0.9031	1.0000	1.0792	1.1461

73.

x	2	7	12	17	22	27	32
y	0.6931	1.9495	2.4849	2.8332	3.0910	3.2958	3.4657

74.

x	11	13	15	17	19	21	23
y	3.3166	3.6056	3.8730	4.1231	4.3589	4.5826	4.7958

75.

x	1	3	5	7	9	11	13
y	3.1623	5.4772	7.0711	8.3666	9.4868	10.4881	11.4018

76.

x	4	9	14	19	24	29	34
y	1.3863	2.1972	2.6391	2.9444	3.1781	3.3673	3.5264

77.

x	5	10	15	20	25	30	35
y	1.6094	2.3026	2.7081	2.9957	3.2189	3.4012	3.5554

78.

x	6	11	16	21	26	31	36
y	1.7918	2.3979	2.7726	3.0445	3.2581	3.4340	3.5835

79.

x	3	8	13	18	23	28	33
y	1.0986	2.0794	2.5650	2.8904	3.1360	3.3322	3.4965

80.

x	2	4	6	8	10	12	14
y	4.4721	6.3246	7.7460	8.9443	10.0000	10.9545	11.8322

В задачах **81-100** вычислить определённый интеграл приближённо по формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. Вычисления производить с округлением до четвёртого десятичного знака.

81. $\int_2^8$ 82. $\int_1^9$

83. $\int_0^{10}$ 84. $\int_2^8$

85. $\int_1^9$ 86. $\int_0^{10}$

87. $\int_1^9$ 88. $\int_0^{10}$

89. $\int_0^{10}$ 90. $\int_1^9$

91. $\int_0^{10}$ 92. $\int_0^{10}$

93. $\int_{0}^{10} \square$ 94. $\int_{1}^{9} \square$

95. $\int_{1}^{9} \square$ 96. $\int_{0}^{10} \square$

97. $\int_{0}^{10} \square$ 98. $\int_{0}^{10} \square$

99. $\int_{1}^{9} \square$ 100. $\int_{2}^{8} \square$

В задачах **101-110** решить методом Адамса дифференциальное уравнение первого порядка при заданном начальном условии на отрезке [0;1] с шагом h=0.1. Все вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака числами.

101. $\frac{y^{\square}}{\square} = x^2 - 2y$, $y(0)=1$.
102. $\frac{y^{\square}}{\square} = x^2 + y$, $y(0)=1$.
103. $\frac{y^{\square}}{\square} = 4x + y$, $y(0)=1$.
104. $\frac{y^{\square}}{\square} = x - y$, $y(0)=1$.
105. $\frac{y^{\square}}{\square} = 2x + y$, $y(0)=1$.
106. $\frac{y^{\square}}{\square} = x^2 - xy$, $y(0)=0.1$.
107. $\frac{y^{\square}}{\square} = 4x - y$, $y(0)=1$.
108. $\frac{y^{\square}}{\square} = x - 2y$, $y(0)=1$.
109. $\frac{y^{\square}}{\square} = 3x - y$, $y(0)=1$.
110. $\frac{y^{\square}}{\square} = x + 2y$, $y(0)=1$.

В задачах **111-120** решить методом Рунге-Кутта дифференциальное уравнение первого порядка при заданном начальном условии на отрезке [0;1] с шагом h=0.1. Все вычисления производить с округлёнными до четвёртого десятичного знака числами.

111. $\frac{y^{\square}}{\square} = x + 2y$, $y(0)=1$.
112. $\frac{y^{\square}}{\square} = 3x - y$, $y(0)=1$.
113. $\frac{y^{\square}}{\square} = x - 2y$, $y(0)=1$.
114. $\frac{y^{\square}}{\square} = 2x + y$, $y(0)=1$.
115. $\frac{y^{\square}}{\square} = x - y$, $y(0)=1$.
116. $\frac{y^{\square}}{\square} = 4x + y$, $y(0)=1$.

117. $y' = x^2 - 2y$, $y(0)=1$.

118. $y' = x^2 + y$, $y(0)=1$.

119. $y' = x^2 - xy$, $y(0)=0{,}1$.

120. $y' = 4x - y$, $y(0)=1$.

121-140. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

121. $L = 2x_1 + x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

122. $L = 4x_1 - 3x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 \\ 8x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

123. $L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 4x_1 - x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

124. $L = 2x_1 + 5x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

125. $L = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 16 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

126. $L = x_1 - 3x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

127. $L = 3x_1 - x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

128. $L = 5x_1 - 2x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \le -3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

129. $L = 2x_1 - 2x_2 \to \min$

130. $L = 6x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 7 \\ -4x_1 + 3x_2 \ge -12 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \ge 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

131. $L = -2x_1 + 3x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \ge 0 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

132. $L = 5x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 0 \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 \le 5; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

133. $L = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 16 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$$

134. $L = 2x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 - 3x_2 \ge -10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 \le 8 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

135. $L = 5x_1 - 2x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

136. $L = x_1 - 2x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

137. $L = -2x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

138. $L = x_1 + 3x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

139. $L = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

при ограничениях

140. $L = 2x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ